

제43회 보험계리사 및 손해사정사 제2차 시험문제
(2020년도 시행)

【 재 무 관 리 및 금 융 공 학 】

1. 시장에 다음과 같은 두 개의 주식만이 존재한다고 가정한다. 무위험자산도 존재하지 않는다. 주식 A와 주식 B의 시장가치는 각각 50억원이고, 두 주식 수익률의 상관계수는 0이다.

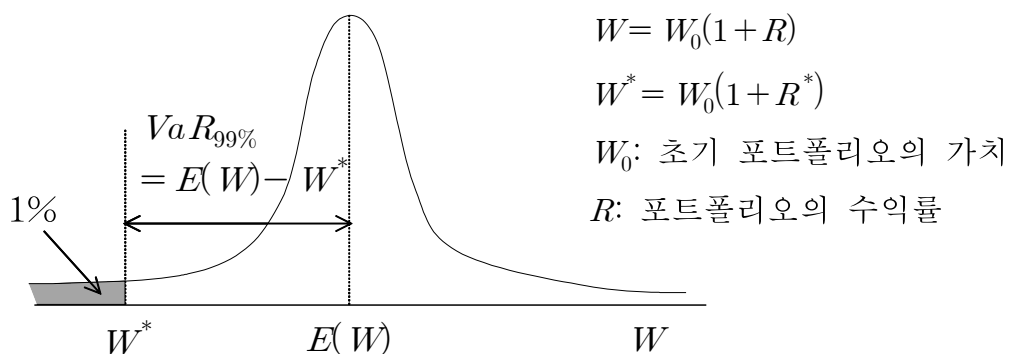
구 분	기대수익률	표준편차
주식 A	10%	20%
주식 B	5%	10%

다음 질문에 답하십시오. (단, 계산 값은 % 단위로 반올림하여 소수 둘째 자리까지 표시하십시오.) (20점)

- (1) 시장포트폴리오의 수익률과 표준편차를 구하십시오. (4점)
- (2) 제로베타 포트폴리오 구성 시 주식 A와 주식 B의 비율을 각각 구하십시오. (단, 공매와 차입은 허용된다.) (4점)
- (3) 제로베타 포트폴리오의 수익률과 체계적위험, 비체계적위험을 구하십시오. (단, 위험은 표준편차로 표시하십시오.) (4점)
- (4) (1), (2), (3)을 활용하여 증권시장선(SML)식을 도출하십시오. (4점)
- (5) 제로베타 포트폴리오의 무위험자산 역할을 수익-위험 평면에서 그래프를 통해 보이시오. (힌트: 투자기회선에서 시장포트폴리오(M)와 제로베타포트폴리오(Z)를 표시) (4점)

(뒷면 계속)

2. Value at Risk (VaR)는 주어진 신뢰수준 하에 정상상황에서 발생할 수 있는 최대손실로 정의된다. 99% 신뢰수준 하에서의 VaR 의 개념을 그래프로 표시하면 아래와 같다.



다음 질문에 답하시오. (20점)

- (1) 포트폴리오의 수익률(R)이 정규분포를 따르고 주어진 신뢰수준(c) 하에서의 표준정규분포 값은 z_c 이고 포트폴리오 수익률의 표준편차는 σ_P 라고 할 때, 포트폴리오의 VaR 값이 $z_c \sigma_P W_0$ 임을 증명하시오. (5점)
- (2) 주식 A와 주식 B에 각각 300만원과 200만원을 투자한 포트폴리오 P가 있다. 두 주식 수익률의 표준편차는 각각 연 5%와 10%이고 수익률 간의 상관계수는 0이라고 하자. 99% 신뢰수준 하에서의 목표기간 1년의 포트폴리오 P의 VaR 값을 구하시오. (단, 99% 신뢰수준 하에서 표준정규분포의 단측 $z_{99\%}$ 값은 2.33이다.) (5점)
- (3) (2)의 정보와 주식 B의 투자금액이 200만원으로 일정하다는 가정을 활용하여 주식 A의 투자금액이 한 단위 증가할 때, 포트폴리오 P의 VaR 값의 변화($\frac{\partial VaR_P}{\partial W_A}$)로 정의되는 $m VaR$ (marginal VaR) 값을 구하시오. (단, 계산 값은 반올림하여 소수 둘째자리까지 표시하시오.) (5점)
- (4) (3)과 독립적으로 주식 A와 주식 B의 투자금액의 합이 500만원이라는 제약 하에서 포트폴리오의 VaR 값을 최소화 하고자 한다. 주식 A의 투자 금액을 구하시오. (5점)

(뒷면 계속)

3. 'ETF-A'(상장지수펀드-A)와 MMF(money market fund)에 대한 정보가 다음과 같다.

X_t : t 시점에서 ETF-A의 가치.

W_t : 표준 브라운 운동(standard Brownian motion).

B_t : t 시점에서 MMF의 가치.

M_t : t 시점에서 ETF-A 보유 수.

N_t : t 시점에서 MMF 보유 수.

$$dX_t/X_t = \mu dt + \sigma dW_t.$$

$$B_t = e^{rt}.$$

ETF-A와 MMF를 이용하여 ETF-A의 k -배수 레버리지 ETF(k -times leveraged ETF)인 'KOLEV'를 제작한다. KOLEV를 만들기 위하여 다음과 같이 M_t 와 N_t 를 결정하고자 한다.

$$V_t = M_t X_t - N_t B_t.$$

$$M_t X_t = k V_t.$$

$$N_t B_t = (k-1) V_t.$$

여기서, V_t 는 t 시점에서 KOLEV의 가치이다.

다음 질문에 답하시오. (15점)

- (1) KOLEV의 $[t, t+dt]$ 구간에서 움직임이 다음과 같을 때, β 를 구하시오. (6점)

$$dV_t/V_t = k \cdot dX_t/X_t + \beta \cdot r dt.$$

- (2) KOLEV 수익률의 변화인 $d \log V_t$ 는 ETF-A의 수익률 변화인 $d \log X_t$ 를 이용하여 다음과 같이 표시할 수 있다. 이때 $\gamma_1 + \gamma_2$ 를 구하시오. (힌트: 이토렘마를 활용하시오) (9점)

$$d \log V_t = k \cdot d \log X_t - \frac{1}{2} [\gamma_1 \sigma^2 + \gamma_2 r] dt.$$

(뒷면 계속)

4. 투자자 A는 미국 주식시장에 상장되어 있는 B구리선물ETF(상장지수펀드) 투자를 고려하고 있다. B구리선물ETF의 기초자산은 미국선물거래소에서 거래되고 있는 구리선물가격을 반영한 C지수이다. C지수가 보유하고 있는 선물은 최근월물이며 매월 5일 최근월물을 차근월물로 교체하는 롤오버(roll-over)를 실시한다. C지수는 선물 10계약으로 구성되어 있다. 월물별 구리선물가격은 다음과 같다.

구분	10월물 (최근월물)	11월물 (차근월물)	12월물 (차차근월물)
9/1	\$80	\$90	\$99
9/5	\$90	\$100	\$109
9/6	\$92	\$101.5	\$110
10/1	\$100	\$110	\$119

거래수수료, 운용수수료, 송금수수료는 없고 ETF와 지수간 괴리율은 0이라고 가정한다.

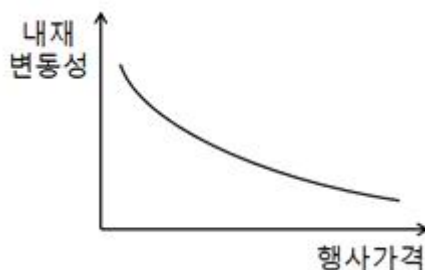
다음 질문에 답하십시오. (단, 계산 값은 반올림하여 소수 넷째자리까지 표시하십시오.) (15점)

- (1) 투자자 A는 9/1일에 B구리선물ETF 1주를 \$800에 매입한 후 10/1일에 매각하였다. 투자수익률을 구하십시오. (힌트: 롤오버 시 가치변화액이 아닌 가치변화율을 통해 계산) (5점)
- (2) 투자자 A는 9/1일 ETF 구입자금 \$800를 미국에서 대출받고 매각 시점인 10/1일에 이를 상환하려고 한다. 투자자 A는 환율 상승을 예상해 만기가 10/1일인 달러에 대한 콜옵션을 한국에서 대출을 통해 원화로 매입하였다. 콜옵션의 행사가격은 9/1일 기준 \$1=1,100원이고 콜옵션 가격은 달러당 50원이다. 만일 10/1일 환율이 \$1=1,200원이 된 경우, 투자자 A가 10/1일에 지급해야하는 금액을 원화로 계산하십시오. 미국과 한국의 대출이자율은 각각 0%와 6%이다. (힌트: ETF 및 콜옵션 구입자금 상환액을 계산) (5점)
- (3) C지수는 월물교체(롤오버) 정책을 변경, 9/5일 최근월물을 차근월물과 차차근월물로 각각 3계약과 2계약을 교체하고, 9/6일에도 최근월물을 차근월물과 차차근월물로 각각 3계약과 2계약을 교체하기로 했다. 9/6일 장 마감 시점에 보유하게 되는 계약 수를 구하십시오. (5점)

(뒷면 계속)

5. 블랙숄츠(Black-Scholes) 모형이 실제 옵션시장을 적절하게 설명하지 못한다는 증거로 변동성 미소(volatility smile) 현상이 언급된다. 변동성 미소 현상은 행사가격이 다른 동일한 잔존만기의 옵션들로부터 추정된 내재변동성(implied volatility)이 상이한 현상이다. 이는 옵션 가격으로부터 도출되는 기초자산의 내재위험중립분포(implied risk neutral distribution)의 모양이 블랙숄츠 모형에서 가정한 대수정규분포(log-normal distribution)와 다른 것으로 해석할 수 있다. 다음 질문에 답하시오. (15점)

- (1) 행사가격에 따른 내재변동성 값을 그래프로 표시한 변동성 미소의 모양은 아래와 같다.



관찰된 변동성 미소 현상에 기초하여 옵션 가격들로부터 추정된 내재 위험중립분포(실선)와 블랙숄츠 모형에서 가정한 대수정규분포(점선)를 동일 평면에서 그래프로 표시하시오. (단, x-y축 그래프에서 x축은 주가, y축은 확률밀도로 한다.) (3점)

- (2) 유럽형 콜옵션의 현재 가치는 아래와 같다.

$$c = e^{-rT} \int_{S_T=K}^{\infty} (S_T - K) g(S_T) dS_T$$

여기서, c 는 유럽형 콜옵션 가격, r 은 무위험수익률, S_T 는 만기 T 시점 (현재시점은 0)의 주가, K 는 옵션의 행사가격, $g(\cdot)$ 는 주가의 확률 밀도함수이다. $g(K) = e^{rT} \frac{\partial^2 c}{\partial K^2}$ 임을 증명하시오. (6점)

- (3) 잔존만기가 T 로 동일하고 행사가격이 각각 $K-dk$, K , $K+dk$ 인 콜옵션의 가격이 c_1 , c_2 , c_3 이다. (6점)

- 1) 해당 콜옵션들을 이용한 나비형 스프레드(butterfly spread) 전략의 현재가치를 구하시오.
- 2) 나비형 스프레드 전략의 수익(payoff)의 기대값을 $g(K)$ 가 포함된 식으로 표현하시오.
- 3) 1)과 2)를 이용하여 $g(K)$ 를 구하시오.

(뒷면 계속)

6. 현재 달러/유로 환율(\$/€)은 E_0 다. 파산 가능성이 없는 미국과 프랑스의 은행이 $t = 0$ 시점에서 스왑거래를 영원히 수행하기로 했다(즉, 만기가 무한대인 스왑거래). 최초의 현금흐름 교환은 $t = 1$ 시점에 이루어진다. 거래를 요약하면 다음 표와 같다.

현금흐름의 방향	t 년도 현금 흐름
미국 은행이 프랑스 은행에게 t 년도에 지급하는 현금흐름	$\exp(g_{\$} \cdot t)$ 달러 (USD)
프랑스 은행이 미국 은행에게 t 년도에 지급하는 현금흐름	$x \cdot \exp(g_{\text{€}} \cdot t)$ 유로 (EUR)

미국과 EU의 이자율기간구조는 평탄(flat)하다. 위 표의 달러와 유로 현금흐름에 대한 t 년도 할인계수는 각각 $\exp(-r_{\$} \cdot t)$ 와 $\exp(-r_{\text{€}} \cdot t)$ 이고, $r_{\$} > g_{\$}$ 와 $r_{\text{€}} > g_{\text{€}}$ 를 만족한다.

다음 질문에 답하시오. (15점)

- (1) 계약시점($t=0$)에서 스왑의 가치를 0으로 만드는 x 를 구하시오. (4점)

- (2) 프랑스 은행과 미국 은행은 $t=1$ 시점 대신 $t = T+1$ 시점에서 현금흐름 교환을 시작하기로 하고 $x = \frac{1}{k}$ 로 확정했다. 따라서 $t = T+\tau$ ($\tau \geq 1$) 시점의 달러와 유로 현금흐름은 각각 $\exp(g_{\$} \cdot \tau)$ 달러와 $\frac{1}{k} \cdot \exp(g_{\text{€}} \cdot \tau)$ 유로이다. T 시점에서 선도환율(\$/€) F 는 아래 식과 같이 표현할 수 있다.

$$F = k \cdot e^{(r_{\text{€}} - r_{\$})T} \cdot \frac{e^{\beta} - 1}{e^{\gamma} - 1} \approx k \cdot e^{(r_{\text{€}} - r_{\$})T} \cdot \frac{\beta}{\gamma}.$$

위 식에서 β 와 γ 를 각각 구하시오. (7점)

- (3) (2)에서 $r_{\$} = r_{\text{€}}$ 이고 $g_{\$} = g_{\text{€}}$ 일 때, 선도환율을 추정하고 그 이유를 설명하시오. (4점)